AGRO 81

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Les parties II, III, IV *sont indépendantes sauf en ce qui concerne les notations :*

I

Soit p un entier naturel strictement positif.

Soit $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus égal à p, à une indéterminée, sur le corps $\mathbb{R}$. On le munit de la base $\beta = \{1, X, X^2, \ldots, X^p\}$.

1° Montrer que les applications $f : P \to Q$, Q tel que $Q(X) = P(X + 1)$;

$g : P \to R$, R tel que $R(X) = P(X - 1)$

sont des applications linéaires de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même.

Déterminer $g \circ f$. Qu'en déduit-on sur f ? Sur g ? Sur la famille :
$\{1, X + 1, (X + 1)^2, \ldots, (X + 1)^p\}$?

2° On note Φ la matrice de f relativement à la base β. Décrire avec soin Φ après avoir calculé ses éléments. De la question précédente, déduire l'inverse Φ^{-1} de la matrice Φ. Décrire avec soin Φ^{-1}.

Dans la partie II, on note $M = {}^t\Phi$.

Tournez la page S. V. P.

1-2131

II

Soit, pour n et p entiers naturels strictement positifs, s_n^p le nombre des surjections (applications surjectives) d'un ensemble A_n de cardinal n dans un ensemble B_p de cardinal p.

1° Calculer, en fonction de n, les nombres s_n^1, s_n^n et s_n^p pour $p > n$.

Par convention, on pose $s_n^o = 0$ pour tout n $(n \geqslant 1)$.

2° Montrer que pour $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, l'on a :

$$s_n^p = p\,(s_{n-1}^{p-1} + s_{n-1}^p)$$

(indication : f étant surjective de A_n dans B_p, et a étant un élément donné de A_n, l'on a ou bien $f(A_n - \{a\}) = B_p$, ou bien $f(A_n - \{a\}) \neq B_p$, ce qui détermine une partition de l'ensemble des surjections de A_n dans B_p).

3° Calculer tous les s_n^p pour $1 \leqslant p \leqslant 5$ et $1 \leqslant n \leqslant 5$, et les présenter dans un tableau comme ci-dessous :

n \ p	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

4° Montrer que, pour tout n $(n \geqslant 1)$ et tout k $(0 \leqslant k \leqslant n)$,

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i s_n^i = s_n^0 + C_k^1 s_n^1 + \ldots + C_k^i s_n^i + \ldots + C_k^k s_n^k = k^n$$

(On cherchera une partition adéquate de l'ensemble des applications de A_n dans B_k).

5° En déduire que l'on a :

$$M \begin{bmatrix} s_n^0 \\ s_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p^n \end{bmatrix}$$

où M est la matrice définie en I.

Écrire intégralement cette égalité matricielle pour $p = 4$.

6° En utilisant les résultats de la partie I, calculer M^{-1} et en déduire la formule suivante, valable pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$s_n^p = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^{p-k} \cdot C_p^k \cdot k^n$$

III

Une marque de biscottes place en prime dans chaque paquet un morceau d'un puzzle. Le puzzle complet comporte N morceaux distincts et l'on suppose que les morceaux sont répartis au hasard dans les différents paquets fabriqués, c'est-à-dire que, lorsqu'on achète un paquet, on a une chance sur N d'y trouver un morceau donné du puzzle.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de paquets à acheter pour avoir réuni pour la première fois les N morceaux du puzzle.

1° Déterminer l'ensemble des valeurs k telles que : $P(X = k) \neq 0$.

2° Calculer $P(X = N)$.

3° Montrer que, pour k supérieur ou égal à N $(k \in \mathbb{N})$, on a :

$$P(X = k) = \frac{s_{k-1}^{N-1}}{N^{k-1}}$$

(la notation s_n^p a été introduite au II).

Tournez la page S. V. P.

IV

Soit Y_i la variable aléatoire égale au nombre de paquets achetés pour avoir pour la première fois i morceaux distincts du puzzle ($i \in \{1, 2, \ldots, N\}$).

On remarquera que $Y_1 = 1$ et $Y_N = X$ (X définie au III).

On pose $Z_1 = Y_1$ et pour $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$ $Z_j = Y_j - Y_{j-1}$.

1° Quelle est la loi de Z_2 ? Calculer $E(Z_2)$ [on ne demande pas la loi de Y_2].

2° Quelle est la loi de Z_i, $i \in \{2, \ldots, N\}$? Calculer $E(Z_i)$.

3° Écrire une relation entre X d'une part, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ d'autre part; en déduire que :

$$E(X) = N\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$$

4° Montrer que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Log}(N+1) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \operatorname{Log} N$$

5° Donner un encadrement de E(X) lorsque $N = 100$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail